Ebene Bewegungsvorgänge mit gemeinsamem Steiner-Punkt

Müller, Hans Robert

Veröffentlicht in:
Abhandlungen der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft Band 38, 1986, S.137-143

Verlag Erich Goltze KG, Göttingen

Ebene Bewegungsvorgänge mit gemeinsamem Steiner-Punkt

Von **Hans Robert Müller,** Braunschweig

(Eingegangen am 9.4.1986)

I.

Unter Hinweis auf [1] des Literaturverzeichnisses mögen die feste, wie die bewegliche Ebene als *Gaußsche* Zahlenebenen angenommen werden. In diesen Ebenen werden rechtwinkelige Achsenkreuze gewählt, mittels derer die cartesischen Koordinaten von Punkten X′ bzw. X zu komplexen Zahlen $x' = x_1' + i\,x_2'$ bzw. $x = x_1 + i\,x_2$ mit $i^2 = -1$ jeweils zusammengefaßt werden. Ein einparametriger geschlossener Bewegungsvorgang **B** der Gangebene **E** gegenüber der Rastebene **E**′ werde durch

$$x' = u' + x\,e^{i\varphi} \tag{1}$$

beschrieben, wobei $u' = u'(t)$, $\varphi = \varphi(t)$ eine komplexe bzw. reelle Funktion des reellen Parameters t für $0 \leq t \leq T$ sei. Die Funktionen seien von genügend hoher Differentiationsordnung vorausgesetzt, t kann als Zeit gedeutet werden. **B** besitze die Periode T mit der Drehzahl ν, d.h. $T > 0$ sei die kleinste reelle Zahl, sodaß

$$u'(t+T) = u'(t), \quad \varphi(t+T) = \varphi(t) + 2\pi\nu \tag{2}$$

gelte. Die Drehzahl ν ist ganzzahlig, ferner sei stets $d\varphi/dt \neq 0$. Für den Momentanpol P findet man dann in **E** bzw. **E**′ die Darstellung

$$p = u - i\frac{du}{d\varphi}, \quad p' = u' + i\frac{du'}{d\varphi} \quad \text{mit } u' = -u\,e^{i\varphi}. \tag{3}$$

Der Schwerpunkt S der Gangpolkurve (P) in **E** bei einer Belegung mit den „Massenelementen“ $d\varphi$ wird als *Steiner*-Punkt S von (P) bezeichnet. Für ihn gilt

$$s = \frac{\oint p\,d\varphi}{\oint d\varphi} = \frac{1}{2\pi\nu}\oint p\,d\varphi = \frac{1}{2\pi\nu}\oint u\,d\varphi. \tag{4}$$

Jeder Punkt $X \in \mathbf{E}$ beschreibt in **E**′ bei **B** eine geschlossene Bahnkurve als Ort der Punkte $X' \in \mathbf{E}'$. Für den Flächeninhalt (Bahninhalt) F_X der umrandeten Fläche gilt nach *Steiner* [2]

$$F_X = F_0 + \pi\nu\,(x\,\bar{x} - s\,\bar{x} - \bar{s}\,x). \tag{5}$$

Hierin bedeutet $\bar{x} = x_1 - i\,x_2$ das Konjugium von $x = x_1 + i\,x_2$. Eine von den gewählten Koordinatensystemen in **E** bzw. **E**′ unabhängige Formel für den Bahninhalt des Punktes $X \in \mathbf{E}$ lautet nach [3] (Seite 116)

$$F_X = F_P' - F_P + \frac{1}{2}\,T_P^X. \tag{6}$$

Hierbei ist F_P der Inhalt der geschlossenen Gangpolkurve (P), die von den Lagen des Pols P in **E** gebildet wird. Entsprechend bedeutet F'_P den Inhalt der Rastpolbahn (P′) in **E**′.

$$T_P^X = \oint a^2 d\varphi \tag{7}$$

kann als das polare Trägheitsmoment der Gangpolkurve (P) bezüglich des Punktes X bei der Belegung mit den Massenelemente $d\varphi$ gedeutet werden. In (7) ist a der Abstand des Punktes X vom Pol P, somit

$$a^2 = (p - x)\,(\bar{p} - \bar{x}). \tag{7'}$$

Hiermit folgert man aus (7) mittels (4) wegen

$$T_P^0 = \oint p\,\bar{p}\,d\varphi$$

ein Gegenstück zur *Steiner*-Formel (5): (Vgl. auch [4]!)

$$T_P^X = T_P^0 + 2\pi\nu\,(x\,\bar{x} - s\,\bar{x} - \bar{s}\,x). \tag{8}$$

Eine in der Gangebene **E** befestigte Gerade g beschreibt bei **B** eine geschlossene Hüllbahn (g) der Länge, d.h. des Umfangs L_g und des Flächeninhalts (Hüllbahninhalt) F_g. Unter Hinweis auf [3] (Seiten 132–138) gelten die Formeln

$$L_g = \oint p_0\,d\varphi = 2\pi\nu\,g_0, \tag{9}$$

$$F_g = F'_P - F_P + \frac{1}{2}\,T_g. \tag{10}$$

Hierin bedeuten p_0 bzw. g_0 die Abstände des augenblicklichen Pols P bzw. des *Steiner*-Punktes S von der Geraden g, also für die Gleichung

$$x_1 \cos\gamma + x_2 \sin\gamma - c = 0 \tag{11}$$

von g in **E**

$$p_0 = c - p_1 \cos\gamma - p_2 \sin\gamma \tag{12}$$

und wegen (4)

$$g_0 = c - s_1 \cos\gamma - s_2 \sin\gamma. \tag{13}$$

F_P und F'_P sind, wie früher, die Inhalte der Gang- bzw. Rastpolbahn.

$$T_g = \oint p_0^2\,d\varphi \tag{14}$$

ist das Trägheitsmoment der Gangpolbahn (P) bei der *Steiner*'schen Massenbelegung bezüglich der Geraden g.

Die hier angeführten Formeln lassen sich weitgehend auf offene Bewegungsvorgänge übertragen. (Vgl. [3])

II.

Wir denken uns nun die Ebene **E** verschiedenen Bewegungsvorgängen gegenüber **E**′ unterworfen und fordern, daß für jeden Punkt $X \in \mathbf{E}$ der gleiche Bahninhalt F_X auftreten möge. Von den zugelassenen Bewegungsvorgängen setzen wir lediglich voraus, daß sie die gleiche Drehzahl ν besitzen.

Es liege nun neben **B** ein weiterer solcher Bewegungsvorgang $\hat{\mathbf{B}}$ vor, für den gemäß (1) und (2) bei gleichen Eigenschaften der auftretenden Funktionen

$$\hat{x}' = \hat{u}' + x\, e^{i\hat{\varphi}}$$

mit

$$\hat{u}'(\hat{t} + \hat{T}) = \hat{u}'(\hat{t}), \quad \hat{\varphi}(\hat{t} + \hat{T}) = \hat{\varphi}(\hat{t}) + 2\pi\nu, \quad 0 \le \hat{t} \le \hat{T}$$

gelten soll. Dann lautet unsere Forderung

$$F_X = \hat{F}_X \tag{15}$$

für alle Punkte $X \in \mathbf{E}$. Somit gilt auch $F_0 = \hat{F}_0$ und mittels der *Steiner*-Formel (5)

$$(s - \hat{s})\, \bar{x} + (\bar{s} - \bar{\hat{s}})\, x = 0$$

für alle Werte x. **B** und $\hat{\mathbf{B}}$ haben daher den gleichen *Steiner*-Punkt $S = \hat{S}$ oder $s = \hat{s}$.

Satz 1: *Alle Bewegungsvorgänge von E gegenüber E' gleicher Drehzahl besitzen, wenn die Übereinstimmung der Bahninhalte für jeden Punkt $X \in E$ gefordert wird, den gleichen Steiner-Punkt* S *in* E.[1])

Wir fragen nun umgekehrt, ob die Übereinstimmung des *Steiner*-Punktes $S = \hat{S}$ auch zu gleichen Bahninhalten führt.

Aus (5) entnehmen wir lediglich die Gleichheit entsprechender Bahninhaltsdifferenzen für zwei Punkte von **E**, etwa $X \in \mathbf{E}$ und $0 \in \mathbf{E}$:

$$F_X - F_0 = \hat{F}_X - \hat{F}_0. \tag{16}$$

Auf Grund der koordinatenunabhängigen Formel (6) ist dies gleichwertig mit

$$T_P^X - T_P^0 = \hat{T}_P^X - \hat{T}_P^0. \tag{17}$$

Somit kann als Umkehrung von Satz 1 gefunden werden:

Satz 2: *Alle Bewegungsvorgänge von* **E** *gegenüber* **E'** *gleicher Drehzahl mit demselben gemeinsamen Steiner-Punkt S in* **E** *führen zu übereinstimmenden Bahninhalten für jeden Punkt $X \in$* **E**, *wenn zusätzlich noch die Übereinstimmung der Bahninhalte für einen speziellen Punkt, etwa $0 \in$* **E** *gefordert wird.*

Durch Modifikation der Fragestellung erhalten wir aus (8):

Satz 3: *Alle Bewegungsvorgänge von* **E** *gegenüber* **E'** *gleicher Drehzahl besitzen, wenn die Übereinstimmung der polaren Trägheitsmomente der Gangpolbahn bezüg-*

[1]) Gleiche Drehzahlen $\nu = \hat{\nu}$ von **B** und $\hat{\mathbf{B}}$ vorauszusetzen, ist in diesem Fall nicht nötig, da wegen der geforderten Übereinstimmung der Bahninhalte aus der *Steiner*'schen Formel (5), die von ihm übrigens nur verbal in ihren Folgerungen formuliert wurde, für alle Punkte $X \in \mathbf{E}$

$$(\nu - \hat{\nu})\, x\bar{x} - (\nu s - \hat{\nu}\hat{s})\, \bar{x} - (\nu\bar{s} - \hat{\nu}\bar{\hat{s}})\, x = 0$$

folgt, was nur für $\nu = \hat{\nu}$, $s = \hat{s}$ möglich ist.

lich jedes Punktes $X \in \mathbf{E}$ gefordert wird, denselben gemeinsamen Steiner-Punkt in **E**.

Umgekehrt führt die Vorgabe eines gemeinsamen *Steiner*-Punktes $S = \hat{S}$ zu (17) und somit zu

Satz 4: *Alle Bewegungsvorgänge von* **E** *gegenüber* **E**' *gleicher Drehzahl mit demselben gemeinsamen Steiner-Punkt S in* **E** *führen zu übereinstimmenden polaren Trägheitsmomenten der Gangpolbahn bezüglich jedes Punktes $X \in \mathbf{E}$, wenn zusätzlich die Übereinstimmung des polaren Trägheitsmomentes für einen speziellen Punkt, etwa $0 \in \mathbf{E}$ gefordert wird.*

III.

Wir dehnen nun unsere Fragestellungen auf Hüllbahn-Längen und -Flächeninhalte von Geraden der Gangebene aus.

Sollen für zwei Bewegungsvorgänge **B** und $\hat{\mathbf{B}}$ die Hüllbahn-Umfänge jeder Geraden $g \in \mathbf{E}$ gleich sein, d.h.

$$L_g = \hat{L}_g, \tag{18}$$

dann folgt wegen (9) sofort für die Abstände von den *Steiner*-Punkten $S, \hat{S}$ deren Übereinstimmung $g_0 = \hat{g}_0$. Nehmen wir eine weitere Gerade $h \in \mathbf{E}$ hinzu, dann finden wir entsprechend $h_0 = \hat{h}_0$. Es besitzen also die zu **B** und $\hat{\mathbf{B}}$ gehörenden *Steiner*-Punkte S bzw. $\hat{S}$ gleiche Entfernungen von den beliebigen, in **E** festen Geraden g und h, was – sofern g und h nicht parallel gewählt werden – zu $S = \hat{S}$, also zu gemeinsamem *Steiner*-Punkt führt.

Satz 5: *Alle Bewegungsvorgänge von* **E** *gegenüber* **E**' *gleicher Drehzahl besitzen, wenn die Übereinstimmung der Hüllbahn-Längen für jede Gerade $g \in \mathbf{E}$ gefordert wird, denselben gemeinsamen Steiner-Punkt S in* **E**.

Als Umkehrung ergibt sich bei der Voraussetzung $g_0 = \hat{g}_0$ wegen (9) sofort der

Satz 6: *Alle Bewegungsvorgänge von* **E** *gegenüber* **E**' *gleicher Drehzahl mit demselben gemeinsamen Steiner-Punkt S in* **E** *führen zur Übereinstimmung der Hüllbahn-Längen für jede Gerade $g \in \mathbf{E}$.*

Bei zwei geschlossenen Bewegungsvorgängen $\mathbf{B}, \hat{\mathbf{B}}$ betrachten wir nun unter Hinweis auf (10) die Übereinstimmung der Hüllbahn-Inhalte

$$F_g = \hat{F}_g. \tag{19}$$

Um das Zusammenfallen der *Steiner*-Punkte beider Bewegungsvorgänge zu zeigen, ziehen wir wiederum zwei Gerade g und $h \in \mathbf{E}$ heran.

Aus (19) und $F_h = \hat{F}_h$ folgern wir durch Bildung der Differenzen

$$F_g - F_h = \hat{F}_g - \hat{F}_h$$

und wegen (10)

$$T_g - T_h = \hat{T}_g - \hat{T}_h. \tag{20}$$

Wir wählen nun die Gerade h parallel zu g. Sie besitzt dann gemäß (11) die Gleichung

$$x_1 \cos\gamma + x_2 \sin\gamma - d = 0 \tag{21}$$

und somit den Abstand vom Pol P, der entsprechend (12) durch

$$q_0 = d - p_1 \cos\gamma - p_2 \sin\gamma \tag{22}$$

gegeben ist.[2])

Berechnen wir nun die Trägheitsmomente T_g und T_h nach (14) und (12) bzw. (22), so fallen die quadratischen Glieder in den Koordinaten p_1, p_2 bei Bildung des jeweiligen Integranden weg und es bleibt, da wir ja $c \neq d$ annehmen wollen, d.h. g und h nicht zusammenfallen sollen,

$$T_g - T_h = 2\pi\nu\,(c^2 - d^2) - 2\,(c-d)\cos\gamma \oint p_1\,d\varphi - 2\,(c-d)\sin\gamma \oint p_2\,d\varphi.$$

(20) liefert nun wegen

$$\oint p_1\,d\varphi = 2\pi\nu\,s_1,\quad \oint p_2\,d\varphi = 2\pi\nu\,s_2$$

die Gleichheit

$$s_1 \cos\gamma + s_2 \sin\gamma = \hat{s}_1 \cos\gamma + \hat{s}_2 \sin\gamma. \tag{23}$$

Da diese Beziehung für alle Winkel γ gelten soll, folgt $s_1 = \hat{s}_1$, $s_2 = \hat{s}_2$.

Satz 7: *Alle Bewegungsvorgänge von* **E** *gegenüber* **E**' *gleicher Drehzahl besitzen, wenn die Übereinstimmung der Hüllbahn-Inhalte für jede Gerade* $g \in \mathbf{E}$ *gefordert wird, denselben gemeinsamen Steiner-Punkt S in* **E**.

Die gleiche Schlußweise ist durchführbar, wenn die Übereinstimmung der Trägheitsmomente $T_g = \hat{T}_g$ für jede Gerade $g \in \mathbf{E}$ gefordert wird. Es gilt dann ebenfalls (20), woraus – wie zuvor – (23) gefolgert werden kann. Für die Trägheitsmomente kann also ein dem Satz 7 entsprechender Satz formuliert werden.

Die Umkehrung des Satzes 7 ist wegen des Auftretens der quadratischen Glieder in den Koordianten p_1, p_2 des Momentanpols P schwieriger und erfordert stärkere zusätzliche Voraussetzungen. Wir setzen gemeinsamen *Steiner*-Punkt $S = \hat{S}$ der betrachteten geschlossenen Bewegungsvorgänge $\mathbf{B}, \hat{\mathbf{B}}$ voraus. Für zwei nicht-parallele Gerade g und h mit den Gleichungen (11) bzw.

$$x_1 \cos\delta + x_2 \sin\delta - d = 0 \quad (\gamma \neq \delta) \tag{24}$$

[2]) Parallele Gerade der Gangebene **E** erzeugen bei einem Bewegungsvorgang Parallelkurven (Äquidistante), für die sich die *Steiner*'schen Formeln für Umfang und Flächeninhalt bei $\nu \neq 1$ modifizieren: $L_h = L_g + 2\pi\nu\,(d-c)$, $F_h = F_g + L_g\,(d-c) + \pi\nu\,(d-c)^2$.

gilt für die Differenz der Hüllbahn-Inhalte

$$2\,(F_g - F_h) = T_g - T_h = \oint (p_0^2 - q_0^2)\, d\varphi, \tag{25}$$

wobei p_0 durch (12) und entsprechend q_0 jetzt durch

$$q_0 = d - p_1 \cos\delta - p_2 \sin\delta \tag{26}$$

gegeben sind. Die nähere Ausführung von (25) liefert

$$\begin{aligned} 2\,(F_g - F_h) &= \oint \left[(p_1 \cos\gamma + p_2 \sin\gamma)^2 - (p_1 \cos\delta + p_2 \sin\delta)^2\right] d\varphi + \\ &+ 2\pi\nu\,(c^2 - d^2) - 4\pi\nu\left[s_1\,(c\cos\gamma - d\cos\delta) + s_2\,(c\sin\gamma - d\sin\delta)\right]. \end{aligned}$$

Daraus mit $s_i = \hat{s}_i$

$$\begin{aligned} 2\left[(F_g - F_h) - (\hat{F}_g - \hat{F}_h)\right] &= G_{11}\,(\cos^2\gamma - \cos^2\delta) + \\ &+ G_{12}\,(\sin 2\gamma - \sin 2\delta) + G_{22}\,(\sin^2\gamma - \sin^2\delta), \end{aligned} \tag{27}$$

wenn zur Abkürzung

$$G_{ik} = \oint p_i p_k\, d\varphi - \oint \hat{p}_i \hat{p}_k\, d\hat{\varphi} = G_{ki} \tag{28}$$

geschrieben wird.

Bisher waren g und h als beliebige Gerade der Gangebene **E** angenommen worden. Nun führen wir für drei spezielle Gerade h von **E** die zusätzlichen Forderungen ein, daß

$$F_h = \hat{F}_h \tag{29}$$

sei. Wir wählen etwa für die erste Gerade $\cos\delta = 0$, für die zweite Gerade $\sin\delta = 0$ und schließlich für die dritte Gerade $\cos\delta = \sin\delta = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

Damit erhalten wir aus (27)

1) $2\,(F_g - \hat{F}_g) = (G_{11} - G_{22})\cos^2\gamma + G_{12}\sin 2\gamma$
2) $2\,(F_g - \hat{F}_g) = -\,(G_{11} - G_{22})\sin^2\gamma + G_{12}\sin 2\gamma$
3) $2\,(F_g - \hat{F}_g) = (G_{11}\,(\cos^2\gamma - \frac{1}{2}) + G_{12}\,(\sin 2\gamma - 1) + G_{22}\,(\sin^2\gamma - \frac{1}{2})$

und daraus wieder durch Differenzbildung von 1) und 2)

$$G_{11} - G_{22} = 0$$

bzw. von 1) und 3)

$$\frac{1}{2}\,(G_{11} - G_{22}) + G_{12} = 0.$$

Daher ist $G_{12} = 0$ und für beliebige Gerade $g \in$ **E** die Übereinstimmung der Hüllbahn-Inhalte

$$F_g = \hat{F}_g \tag{30}$$

bei zwei geschlossenen Bewegungsvorgängen **B**,$\hat{\mathbf{B}}$ gefunden.

Satz 8: *Alle Bewegungsvorgänge von* **E** gegenüber **E**′ *gleicher Drehzahl mit demselben gemeinsamen Steiner-Punkt S in* **E** *führen zur Übereinstimmung der Hüllbahn-*

Inhalte für jede Gerade $g \in \mathbf{E}$, wenn zusätzlich noch die Übereinstimmung der Hüllbahn-Inhalte von drei speziellen Geraden der Ebene **E** *gefordert wird.*

Es liegt auf der Hand, daß für die Trägheitsmomente T_g ein entsprechender Satz formuliert werden kann.

Literaturverzeichnis

[1] H. R. MÜLLER: Verallgemeinerung einer Formel von Steiner. Abh. d. Brschw. Wiss. Ges., Bd. XXIX (1978), 107–113.

[2] J. STEINER: Gesammelte Werke, Berlin 1881/82.

[3] W. BLASCHKE – H. R. MÜLLER: Ebene Kinematik (Math. Einzelschr., Bd. 5), München 1956.

[4] H. R. MÜLLER: Über Trägheitsmomente bei Steinerscher Massenbelegung. Abh. d. Brschw. Wiss. Ges., Bd. XXIX (1978), 115–119.